スタディサプリ　共通テスト直前対策講座　数学ⅡＢについて

この講座は，大学入学共通テストおよびセンター試験の「過去問題」を通じて，みなさんの実力をチェックし，底上げをするというコンセプトで作りました。この講座を見る頃は，おそらくほぼ全員の人が共通テストの過去問題を解いたことがあるでしょう。では，今一度，次のことを思い返してください。

・いつその過去問題を解きましたか？　まだ実力が伴っていない時期ではないですか？
・どのようなやり方で解きましたか？　今でも同じ解法を取りますか？
・解き直しをしましたか？　それぞれの大問は最後まで解き切りましたか？

１つでも「あ……」と思った人，この講座は，そんなあなたのためにあります。

あなたの「今の」実力が，大学入学共通テストがあなたに要求している資質・能力に対し，どこまで到達していて，どの部分が上回っているのか，または下回っているのか，あなたの予習と動画講義を通じてチェックすることで，あなたの実力が分野毎に整理されます。到達している，または上回っていれば，あとは演習あるのみ，そうでなければ，各分野を見直す最後のチャンスです。

直前期だからこそできる，「あなたの課題」の発見と克服。この講座に，得点アップのカギが隠されています。あなたならではのそのカギを発見してください。

山内　恵介

― 目次 ―

第１講　図形と方程式・三角関数
第２講　指数関数・対数関数
第３講　微分法・積分法
第４講　数列
第５講　ベクトル

※該当する講の「予習」を，ノート等に必ず行ってから動画講義に臨んでください。講義は予習を行っていることを前提に行われます。

第１講　図形と方程式・三角関数

1　座標平面上で，直線 $3x+2y-39=0$ を ℓ_1 とする。また，k を実数とし，直線 $kx-y-5k+12=0$ を ℓ_2 とする。

(1)　直線 ℓ_1 と x 軸は，点 (アイ，0) で交わる。

また，直線 ℓ_2 は k の値に関係なく点 (ウ，エオ) を通り，直線 ℓ_1 もこの点を通る。

(2)　2 直線 ℓ_1，ℓ_2 および x 軸によって囲まれた三角形が**できないような** k の値は

$k=$ カ，$\dfrac{\text{キク}}{\text{ケ}}$

である。

（次ページに続く。）

(3)　2 直線 ℓ_1，ℓ_2 および x 軸によって囲まれた三角形ができるとき，この三角形の周および内部からなる領域を D とする。さらに，r を正の実数とし，不等式 $x^2+y^2 \leqq r^2$ の表す領域を E とする。

直線 ℓ_2 が点 $(-13,\ 0)$ を通る場合を考える。このとき，$k=\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$ である。さらに，D が E に含まれるような r の値の範囲は

$r \geqq \boxed{シス}$

である。

次に，$r=\boxed{シス}$ の場合を考える。このとき，D が E に含まれるような k の値の範囲は

$k \geqq \dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$ または $k < \dfrac{\boxed{タチ}}{\boxed{ツ}}$

である。

2　θ は $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ を満たすとする。

(1)　$\tan\theta=-\sqrt{3}$ のとき，$\theta=$ **ア** であり

$\cos\theta=$ **イ**，$\sin\theta=$ **ウ**

である。

一般に，$\tan\theta=k$ のとき

$\cos\theta=$ **エ**，$\sin\theta=$ **オ**

である。

ア の解答群

⓪ $-\frac{\pi}{3}$	① $-\frac{\pi}{4}$	② $-\frac{\pi}{6}$	③ $\frac{\pi}{6}$	④ $\frac{\pi}{4}$	⑤ $\frac{\pi}{3}$

イ，**ウ** の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ 0	① 1	② -1
③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$	④ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
⑥ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	⑦ $\frac{1}{2}$	⑧ $-\frac{1}{2}$

エ，**オ** の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ $\frac{1}{1+k^2}$	① $-\frac{1}{1+k^2}$	② $\frac{k}{1+k^2}$	③ $-\frac{k}{1+k^2}$
④ $\frac{2}{1+k^2}$	⑤ $-\frac{2}{1+k^2}$	⑥ $\frac{2k}{1+k^2}$	⑦ $-\frac{2k}{1+k^2}$
⑧ $\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$	⑨ $-\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$	ⓐ $\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$	ⓑ $-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$

（次ページに続く。）

(2)　花子さんと太郎さんは，関数のとり得る値の範囲について話している。

花子：$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲で θ を動かすとき，$\tan\theta$ のとり得る値の範囲は実数全体だよね。

太郎：$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ だけど，分子を少し変えるとどうなるかな。

$\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}=p$，$\frac{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{7}\right)}{\cos\theta}=q$ とおく。

$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲で θ を動かすとき，p のとり得る値の範囲は［カ］であり，q のとり得る値の範囲は［キ］である。

［カ］の解答群

⓪　$-1<p<1$	①　$0<p<1$
②　$-2<p<2$	③　$0<p<2$
④　実数全体	⑤　正の実数全体

［キ］の解答群

⓪　$-1<q<1$	①　$0<q<1$
②　$-2<q<2$	③　$0<q<2$
④　実数全体	⑤　正の実数全体
⑥　$-\sin\frac{\pi}{7}<q<\sin\frac{\pi}{7}$	⑦　$0<q<\sin\frac{\pi}{7}$
⑧　$-\cos\frac{\pi}{7}<q<\cos\frac{\pi}{7}$	⑨　$0<q<\cos\frac{\pi}{7}$

（次ページに続く。）

(3)　α は $0 \leqq \alpha < 2\pi$ を満たすとし

$$\frac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos\theta} = r$$

とおく。$\alpha = \dfrac{\pi}{7}$ の場合，r は(2)で定めた q と等しい。

α の値を一つ定め，$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で θ のみを動かすとき，r のとり得る値の範囲を考える。

r のとり得る値の範囲が q のとり得る値の範囲と異なるような α $(0 \leqq \alpha < 2\pi)$ は **ク** 。

ク の解答群

⓪　存在しない	①　ちょうど 1 個存在する
②　ちょうど 2 個存在する	③　ちょうど 3 個存在する
④　ちょうど 4 個存在する	⑤　5 個以上存在する

3　座標平面上の原点を中心とする半径１の円周上に３点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $\mathrm{Q}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$, $\mathrm{R}(\cos\beta,\ \sin\beta)$ がある。ただし，$0 \leqq \theta < \alpha < \beta < 2\pi$ とする。このとき，s と t を次のように定める。

$$s = \cos\theta + \cos\alpha + \cos\beta,\quad t = \sin\theta + \sin\alpha + \sin\beta$$

(1)　△PQR が正三角形や二等辺三角形のときの s と t の値について考察しよう。

考察１

△PQR が正三角形である場合を考える。

この場合，α，β を θ で表すと

$$\alpha = \theta + \frac{\boxed{ア}}{3}\pi,\quad \beta = \theta + \frac{\boxed{イ}}{3}\pi$$

であり，加法定理により

$$\cos\alpha = \boxed{ウ},\quad \sin\alpha = \boxed{エ}$$

である。同様に，$\cos\beta$ および $\sin\beta$ を，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ を用いて表すことができる。

これらのことから，$s = t = \boxed{オ}$ である。

$\boxed{ウ}$，$\boxed{エ}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ $\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$　　① $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta$

② $\frac{1}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$　　③ $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta$

④ $-\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$　　⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta$

⑥ $-\frac{1}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$　　⑦ $-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta$

（次ページに続く。）

考察２

△PQR が PQ＝PR となる二等辺三角形である場合を考える。

例えば，点 P が直線 $y=x$ 上にあり，点 Q，R が直線 $y=x$ に関して対称であるときを考える。このとき，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ である。また，α は $\alpha<\dfrac{5}{4}\pi$，β は $\dfrac{5}{4}\pi<\beta$ を満たし，点 Q，R の座標について，$\sin\beta=\cos\alpha$，$\cos\beta=\sin\alpha$ が成り立つ。よって

$$s=t=\frac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}+\sin\alpha+\cos\alpha$$

である。

ここで，三角関数の合成により

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{\boxed{\text{ク}}}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}}\right)$$

である。したがって

$$\alpha=\frac{\boxed{\text{コサ}}}{12}\pi,\quad \beta=\frac{\boxed{\text{シス}}}{12}\pi$$

のとき，$s=t=0$ である。

（次ページに続く。）

(2)　次に，s と t の値を定めたときの θ，α，β の関係について考察しよう。

考察３

$s=t=0$ の場合を考える。

この場合，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ により，α と β について考えると

$$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

である。

同様に，θ と α について考えると

$$\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha=\frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

であるから，θ，α，β の範囲に注意すると

$$\beta-\alpha=\alpha-\theta=\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\pi$$

という関係が得られる。

（次ページに続く。）

(3)　これまでの考察を振り返ると，次の⓪～③のうち，正しいものは［テ］であることがわかる。

［テ］の解答群

⓪　△PQR が正三角形ならば $s=t=0$ であり，$s=t=0$ ならば △PQR は正三角形である。

①　△PQR が正三角形ならば $s=t=0$ であるが，$s=t=0$ であっても △PQR が正三角形でない場合がある。

②　△PQR が正三角形であっても $s=t=0$ でない場合があるが，$s=t=0$ ならば △PQR は正三角形である。

③　△PQR が正三角形であっても $s=t=0$ でない場合があり，$s=t=0$ であっても △PQR が正三角形でない場合がある。

テキスト解答

【講義問題の略解】

※動画講義の内容を補完するものです。記述式の試験の答案を想定したものとはなっておりません。ご了承ください。

第１講　図形と方程式・三角関数

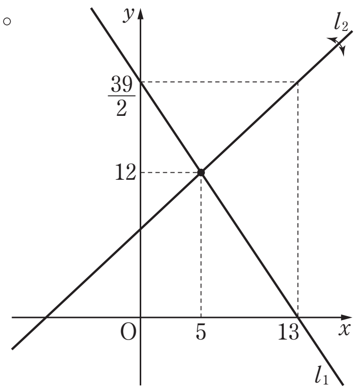
1 (1) $\ell_1 : 3x+2y-39=0$ において，$y=0$ のとき $x=13$
よって，直線 ℓ_1 と x 軸は，点 $(13,\ 0)$ で交わる。
$\ell_2 : kx-y-5k+12=0 \iff k(x-5)-y+12=0$ より，$x=5$，$y=12$ のとき
この式は k の値に関係なく成立する。よって，直線 ℓ_2 は k の値に関係なく
点 $(5,\ 12)$ を通る。また，$x=5$，$y=12$ のとき，ℓ_1 の式も成立することから，
直線 ℓ_1 も点 $(5,\ 12)$ を通る。

(2) $\ell_2 : y=k(x-5)+12$ より，ℓ_2 は傾き k の直線である。
よって，2 直線 ℓ_1，ℓ_2 および x 軸によって囲まれた三角形ができないのは

・$k=0$（ℓ_2 は x 軸と平行な直線）

・$k=-\dfrac{3}{2}$（ℓ_2 が ℓ_1 と一致）

のいずれかの場合である。

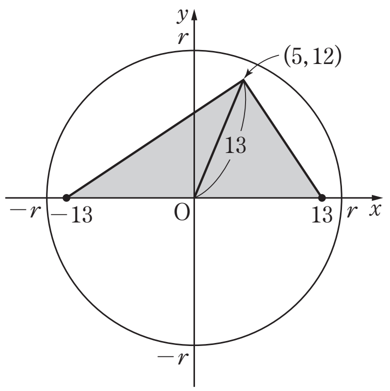


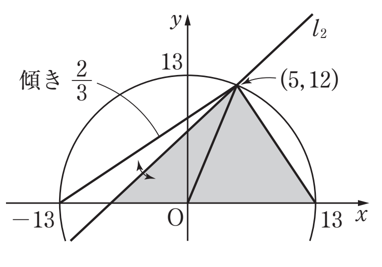
(3) 直線 ℓ_2 が点 $(-13,\ 0)$ を通るとき $k=\dfrac{12}{18}=\dfrac{2}{3}$

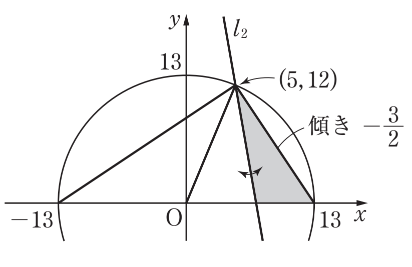
領域 D は，3 点 $(5,\ 12)$，$(13,\ 0)$，$(-13,\ 0)$ を頂点とする三角形の周および内部であり，領域 E は，原点中心，半径 r の円の周および内部である。右図より，D が E に含まれるような r の値の範囲は $r \geqq 13$ である。
$r=13$ のとき，D が E に含まれるような k の値の範囲は，k が直線 ℓ_2 の傾きであることから

$k>0$ のとき $k \geqq \dfrac{2}{3}$　　$k<0$ のとき $k<-\dfrac{3}{2}$

である。







2 (1)　$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において

$\tan\theta=-\sqrt{3}$ のとき

$\theta=-\dfrac{\pi}{3}$ (⓪), $\cos\theta=\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$ (⑦), $\sin\theta=\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (④)

$\tan\theta=k$ のとき

$\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1}{1+k^2}$

$\cos\theta>0$ より　$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$　(⑧)

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より　$\sin\theta=\tan\theta\times\cos\theta=k\times\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}$　(ⓐ)

(2)　$p=\dfrac{\sin2\theta}{\cos\theta}=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta}=2\sin\theta$

$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より　$-1<\sin\theta<1$　　よって　$-2<p<2$　(②)

$q=\dfrac{\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{7}\right)}{\cos\theta}=\dfrac{\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{7}+\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{7}}{\cos\theta}=\tan\theta\cos\dfrac{\pi}{7}+\sin\dfrac{\pi}{7}$

$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より　$\tan\theta$ のとり得る値の範囲は実数全体。

$\cos\dfrac{\pi}{7}$ は 0 でない定数，$\sin\dfrac{\pi}{7}$ は定数であるから

q のとり得る値の範囲は　実数全体　(④)

(3)　$r=\dfrac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos\theta}=\dfrac{\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha}{\cos\theta}=\tan\theta\cos\alpha+\sin\alpha$

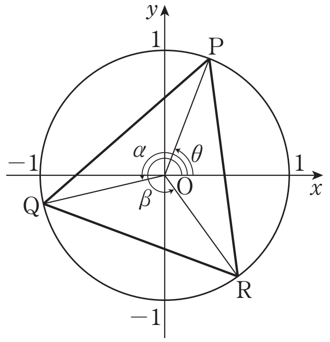
α の値を $0\leqq\alpha<2\pi$ において一つ定めたとき，$\cos\alpha$，$\sin\alpha$ は定数であるから，

r のとり得る値の範囲が q のとり得る値の範囲と異なるのは

$\cos\alpha=0$　つまり　$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$

のときで，このとき r は定数 $\sin\alpha$ となる。よって　②

3 (1)　考察１について



△PQR が正三角形である場合，$\angle\text{PRQ}=\dfrac{\pi}{3}$ より

$\angle\text{POQ}=\dfrac{2}{3}\pi$

よって，$\alpha=\theta+\dfrac{2}{3}\pi$

同様に，$\angle\text{QOR}=\dfrac{2}{3}\pi$ より，$\beta=\theta+\dfrac{4}{3}\pi$

加法定理により

$$\cos\alpha=\cos\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)=\cos\theta\cos\frac{2}{3}\pi-\sin\theta\sin\frac{2}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta \ (⑦)$$

$$\sin\alpha=\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)=\sin\theta\cos\frac{2}{3}\pi+\cos\theta\sin\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta \ (④)$$

同様に

$$\cos\beta=\cos\left(\theta+\frac{4}{3}\pi\right)=\cos\theta\cos\frac{4}{3}\pi-\sin\theta\sin\frac{4}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta$$

$$\sin\beta=\sin\left(\theta+\frac{4}{3}\pi\right)=\sin\theta\cos\frac{4}{3}\pi+\cos\theta\sin\frac{4}{3}\pi=-\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$$

これらのことから

$$s=\cos\theta+\cos\alpha+\cos\beta$$

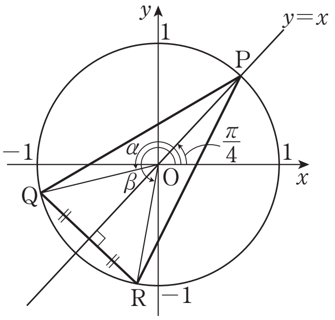
$$=\cos\theta+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right)=0$$

$$t=\sin\theta+\sin\alpha+\sin\beta$$

$$=\sin\theta+\left(-\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)+\left(-\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)=0$$

より，$s=t=0$ である。

考察２について，$Q(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$R(\cos\beta,\ \sin\beta)$ が直線 $y=x$ に関して対称であるから，$\sin\beta=\cos\alpha$，$\cos\beta=\sin\alpha$ が成り立つ。よって



$$s=\cos\theta+\cos\alpha+\cos\beta=\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha+\sin\alpha$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin\alpha+\cos\alpha$$

$$t=\sin\theta+\sin\alpha+\sin\beta=\sin\frac{\pi}{4}+\sin\alpha+\cos\alpha$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin\alpha+\cos\alpha$$

したがって，$s=t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sin\alpha+\cos\alpha$

ここで，三角関数の合成により

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

である。したがって

$$s=t=\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

$s=t=0$ のとき

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$$

$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{5}{4}\pi$ より $\frac{\pi}{2}<\alpha+\frac{\pi}{4}<\frac{3}{2}\pi$

よって，$\alpha+\frac{\pi}{4}=\frac{7}{6}\pi$ より $\alpha=\frac{11}{12}\pi$

また，$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{5}{4}\pi$ より，$\beta=\frac{5}{2}\pi-\alpha=\frac{5}{2}\pi-\frac{11}{12}\pi=\frac{19}{12}\pi$

(2)　$s=t=0$ のとき

$\cos\theta+\cos\alpha+\cos\beta=0$ より $\cos\theta=-\cos\alpha-\cos\beta$

$\sin\theta+\sin\alpha+\sin\beta=0$ より $\sin\theta=-\sin\alpha-\sin\beta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

$(-\sin\alpha-\sin\beta)^2+(-\cos\alpha-\cos\beta)^2=1$

$2+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=1$

よって，$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}$　……①

同様に，$\cos\beta=-\cos\theta-\cos\alpha$，$\sin\beta=-\sin\theta-\sin\alpha$，$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ より

$\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha=-\frac{1}{2}$　……②

①より　$\cos(\beta-\alpha)=-\frac{1}{2}$　　　②より　$\cos(\alpha-\theta)=-\frac{1}{2}$

よって，$\cos(\beta-\alpha)=\cos(\alpha-\theta)=-\frac{1}{2}$

ここで，$0\leqq\theta<\alpha<\beta<2\pi$ より，$0<\beta-\alpha<2\pi$，$0<\alpha-\theta<2\pi$

よって，$\beta-\alpha$ および $\alpha-\theta$ は $\frac{2}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi$ のいずれかである。

$\theta+(\beta-\alpha)+(\alpha-\theta)<2\pi$ より，$\beta-\alpha=\alpha-\theta=\frac{2}{3}\pi$

(3)　考察1より，△PQR が正三角形ならば $s=t=0$ である。

また，考察3より

$\beta-\alpha=\alpha-\theta=\frac{2}{3}\pi$ であるから，$\angle QOR=\angle POQ=\frac{2}{3}\pi$

よって，$\angle QPR=\angle PRQ=\frac{\pi}{3}$ であり，$\angle RQP=\frac{\pi}{3}$ であるから，△PQR は正三角形である。

したがって，$s=t=0$ ならば，△PQR は正三角形である。

以上より，△PQR が正三角形ならば $s=t=0$ であり，$s=t=0$ ならば △PQR は正三角形である（⓪）。

（参考）

考察2の結果について，

$\theta=\frac{\pi}{4}$，$\alpha=\frac{11}{12}\pi$ より，$\angle POQ=\alpha-\theta=\frac{11}{12}\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{2}{3}\pi$

$\alpha=\frac{11}{12}\pi$，$\beta=\frac{19}{12}\pi$ より，$\angle\mathrm{QOR}=\beta-\alpha=\frac{19}{12}\pi-\frac{11}{12}\pi=\frac{2}{3}\pi$

よって，$\angle\mathrm{PRQ}=\angle\mathrm{QPR}=\frac{\pi}{3}$ であり，PQ＝PR であるから，△PQR は正三角形である。